第27卷 第6期　　工 程 数 学 学 报　　Vol. 27 No. 6
2010年12月　　CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS　　Dec. 2010

文章编号:1005-3085(2010)06-1015-06

改进的非奇H矩阵的判定条件*

赵良东, 徐　仲, 陆　全

(西北工业大学应用数学系，西安　710072)

摘　要: 非奇H矩阵在控制论，经济数学和动力系统理论等领域中起着重要的作用，但在实际中判定非奇H矩阵是比较困难的。本文给出了非奇H矩阵的几个判定条件，改进和推广了近期的一些结果。数值算例表明，这些条件是实用的且判定范围更广。

关键词: 广义严格对角占优矩阵；非奇H矩阵；判定条件

分类号: **AMS**(2000) 15A47　　**中图分类号**: O151.21　　**文献标识码**: A

1　引言

设$\mathbf{A}=(a_{ij})\in \mathrm{C}^{n\times n}$，其中$\mathrm{C}^{n\times n}$表示$n$阶复矩阵的集合。记

$$N=\{1,2,\cdots,n\},\quad \Lambda_i(\mathbf{A})=\sum_{j\in N,\,j\neq i}|a_{ij}|.$$

又记

$$N_1=\big\{i\in N:0<|a_{ii}|=\Lambda_i(\mathbf{A})\big\},\quad N_2=\big\{i\in N:0<|a_{ii}|<\Lambda_i(\mathbf{A})\big\},$$
$$N_3=\big\{i\in N:|a_{ii}|>\Lambda_i(\mathbf{A})\big\}.$$

若对任意的$i\in N$，有$|a_{ii}|>\Lambda_i(\mathbf{A})$，则称$\mathbf{A}$为严格对角占优矩阵；若存在正对角矩阵$\mathbf{D}$，使得$\mathbf{AD}$为严格对角占优矩阵，则$\mathbf{A}$为广义严格对角占优矩阵，即为非奇H矩阵[3]。

非奇H矩阵在数学物理，控制论，经济数学和动力系统理论等领域中起着重要的作用，其判定问题一直是研究的热门课题[1-7]。文献[4]给出了非奇H矩阵的若干实用判据，其主要结论如下。

定理1　设$\mathbf{A}=(a_{ij})\in \mathrm{C}^{n\times n}$，若对任意的$i\in N_1$，$j\in N_2$，有

$$|a_{ii}|>\sum_{t\in N_1,\,t\neq i}|a_{it}|+\sum_{t\in N_2}|a_{it}|x_t+\sum_{t\in N_3}|a_{it}|y_t,$$
$$|a_{jj}|x_j>\sum_{t\in N_1}|a_{jt}|+\sum_{t\in N_2,\,t\neq j}|a_{jt}|x_t+\sum_{t\in N_3}|a_{jt}|y_t,\tag{1}$$

其中

$$x_i=\big(\Lambda_i(\mathbf{A})-|a_{ii}|\big)/\Lambda_i(\mathbf{A}),\quad i\in N_2,\quad y_i=\Lambda_i(\mathbf{A})/|a_{ii}|,\quad i\in N_3,$$

则$\mathbf{A}$为非奇H矩阵。

收稿日期: 2009-03-13.　**作者简介**: 赵良东(1984年7月生)，男，硕士. 研究方向：数值代数.

***基金项目**: 国家自然科学基金(10802068).

本文给出了几个判定非奇H矩阵的新条件，改进了文献[4]的结果，数值算例表明这些条件是实用的且判定范围更广。

当$N_1 \cup N_2 = \emptyset$时，显然$\mathbf{A}$为非奇H矩阵。若$\mathbf{A}$为非奇H矩阵，则$\mathbf{A}$的主对角线元素非零且至少有一严格对角占优行[2]，因此本文总假设$N_1 \cup N_2 \neq \emptyset$，$N_3 \neq \emptyset$。

2 改进的非奇H矩阵的判定条件

定理2 设$\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathrm{C}^{n\times n}$，若对任意的$i \in N_3$，$j \in N_1 \cup N_3$，记

$$\lambda_i = \frac{\sum\limits_{t\in N_1}|a_{it}| + \sum\limits_{t\in N_2}|a_{it}|x_t}{|a_{ii}| - \sum\limits_{t\in N_3,t\neq i}|a_{it}|}, \quad \lambda = \max_{i\in N_3}\lambda_i, \quad S_i = \sum_{t\in N_1}|a_{it}| + \sum_{t\in N_2}|a_{it}|x_t + \lambda \sum_{t\in N_3,t\neq i}|a_{it}|,$$

$$\mu_i = \frac{\sum\limits_{t\in N_1}|a_{it}| + \sum\limits_{t\in N_2}|a_{it}|x_t}{S_i - \sum\limits_{t\in N_3,t\neq i}|a_{it}|\frac{S_t}{|a_{tt}|}}, \quad \mu = \max_{i\in N_3}\mu_i, \quad \tilde{\mu} = \mu + (1-\mu)\max_{i\in N_1}\frac{\sum\limits_{t\in N_2}|a_{it}|x_t + \sum\limits_{t\in N_3}|a_{it}|}{|a_{ii}| - \sum\limits_{t\in N_1,t\neq i}|a_{it}|},$$

$$T_j = \tilde{\mu}\sum_{t\in N_1,t\neq j}|a_{jt}| + \sum_{t\in N_2}|a_{jt}|x_t + \mu\sum_{t\in N_3,t\neq j}|a_{jt}|\frac{S_t}{|a_{tt}|},$$

约定当

$$S_i - \sum_{t\in N_3,t\neq i}|a_{it}|\frac{S_t}{|a_{tt}|} = 0, \quad i \in N_3$$

时，$\mu_i = 1$。若对任意的$i \in N_1$，$j \in N_2$，有

$$|a_{ii}|\tilde{\mu} > \tilde{\mu}\sum_{t\in N_1,t\neq i}|a_{it}| + \sum_{t\in N_2}|a_{it}|x_t + \mu\sum_{t\in N_3}|a_{it}|\frac{S_t}{|a_{tt}|}, \tag{2}$$

$$|a_{jj}|x_j > \sum_{t\in N_1}|a_{jt}|\frac{T_t}{|a_{tt}|} + \sum_{t\in N_2,t\neq j}|a_{jt}|x_t + \sum_{t\in N_3}|a_{jt}|\frac{T_t}{|a_{tt}|}, \tag{3}$$

则$\mathbf{A}$是非奇H矩阵。

证明 由于对任意的$i \in N_2$，有$0 < x_i < 1$，故对任意的$i \in N_3$，有$0 \le \lambda_i < 1$，进而$0 \le \lambda < 1$。又由对任意的$i \in N_3$，有$\lambda \ge \lambda_i$，得

$$\lambda|a_{ii}| \ge \sum_{t\in N_1}|a_{it}| + \sum_{t\in N_2}|a_{it}|x_t + \lambda\sum_{t\in N_3,t\neq i}|a_{it}| = S_i,$$

从而

$$0 \le \frac{S_i}{|a_{ii}|} \le \lambda < 1, \quad \forall\, i \in N_3, \tag{4}$$

由式(4)知

$$S_i - \sum_{t\in N_3,t\neq i}|a_{it}|\frac{S_t}{|a_{tt}|} \ge S_i - \lambda\sum_{t\in N_3,t\neq i}|a_{it}| = \sum_{t\in N_1}|a_{it}| + \sum_{t\in N_2}|a_{it}|x_t \ge 0, \quad \forall\, i \in N_3,$$

由上式和约定即得$0 \le \mu_i \le 1$，对任意的$i \in N_3$，进而$0 \le \mu \le 1$。由于

$$|a_{ii}| > \sum_{t\in N_1,t\neq i}|a_{it}|, \quad i \in N_1,$$

否则与式(2)矛盾，从而$0\le\mu\le\tilde{\mu}\le 1$且$\tilde{\mu}>0$。

由式(2)知，一定存在充分小的$\varepsilon>0$，使得

$$|a_{ii}|\tilde{\mu}-\tilde{\mu}\sum_{t\in N_1,t\neq i}|a_{it}|-\sum_{t\in N_2}|a_{it}|x_t-\mu\sum_{t\in N_3}|a_{it}|\frac{S_t}{|a_{tt}|}>\varepsilon\sum_{t\in N_3}|a_{it}|,\quad\forall\, i\in N_1,\tag{5}$$

由$\mu\ge\mu_i$，对任意的$i\in N_3$，得

$$\mu S_i\ge\sum_{t\in N_1}|a_{it}|+\sum_{t\in N_2}|a_{it}|x_t+\mu\sum_{t\in N_3,t\neq i}|a_{it}|\frac{S_t}{|a_{tt}|},\quad\forall\, i\in N_3.\tag{6}$$

构造正对角矩阵$\mathbf{D}_1=\operatorname{diag}(d_1,d_2,\cdots,d_n)$，其中

$$d_i=\tilde{\mu},\quad\forall\, i\in N_1,\quad d_i=x_i,\quad\forall\, i\in N_2,\quad d_i=\mu\frac{S_i}{|a_{ii}|}+\varepsilon,\quad\forall\, i\in N_3,$$

令$\mathbf{B}=(b_{ij})_{n\times n}=\mathbf{AD}_1$，则对任意的$i\in N_1$，由式(5)得

$$\begin{aligned}\Lambda_i(\mathbf{B})&=\sum_{t\in N_1,t\neq i}|a_{it}|\tilde{\mu}+\sum_{t\in N_2}|a_{it}|x_t+\sum_{t\in N_3}|a_{it}|\Big(\mu\frac{S_t}{|a_{tt}|}+\varepsilon\Big)\\&=\tilde{\mu}\sum_{t\in N_1,t\neq i}|a_{it}|+\sum_{t\in N_2}|a_{it}|x_t+\mu\sum_{t\in N_3}|a_{it}|\frac{S_t}{|a_{tt}|}+\varepsilon\sum_{t\in N_3}|a_{it}|\\&<|a_{ii}|\tilde{\mu}=|b_{ii}|,\end{aligned}\tag{7}$$

而对任意的$i\in N_3$，由式(6)以及$\tilde{\mu}\le 1$，得

$$\begin{aligned}\Lambda_i(\mathbf{B})&=\sum_{t\in N_1}|a_{it}|\tilde{\mu}+\sum_{t\in N_2}|a_{it}|x_t+\sum_{t\in N_3,t\neq i}|a_{it}|\Big(\mu\frac{S_t}{|a_{tt}|}+\varepsilon\Big)\\&\le\mu S_i+\varepsilon\sum_{t\in N_3,t\neq i}|a_{it}|<\mu S_i+\varepsilon|a_{ii}|=|a_{ii}|d_i=|b_{ii}|,\end{aligned}$$

可见对任意的$i\in N_1\cup N_3$，有$\Lambda_i(\mathbf{B})<|b_{ii}|$，故一定存在充分小的$\delta>0$，使得

$$0<\frac{\Lambda_i(\mathbf{B})+\delta}{|b_{ii}|}<1,\quad\forall\, i\in N_1\cup N_3.\tag{8}$$

利用式(2)和(3)的假设，可取充分小的正数ε,δ，使式(5)和式(8)满足，且对任意的$j\in N_2$，有

$$\begin{aligned}&|a_{jj}|x_j-\sum_{t\in N_1\cup N_3}|a_{jt}|\frac{T_t}{|a_{tt}|}-\sum_{t\in N_2,t\neq j}|a_{jt}|x_t\\&>\varepsilon\sum_{t\in N_1\cup N_3}\frac{|a_{jt}|}{|a_{tt}|}\Big(\sum_{k\in N_3,k\neq t}|a_{tk}|\Big)+\delta\sum_{t\in N_1\cup N_3}\frac{|a_{jt}|}{|a_{tt}|}.\end{aligned}\tag{9}$$

再构造正对角矩阵$\mathbf{D}_2=\operatorname{diag}(d'_1,d'_2,\cdots,d'_n)$，其中

$$d'_i=\frac{\Lambda_i(\mathbf{B})+\delta}{|b_{ii}|},\quad\forall\, i\in N_1\cup N_3,\quad d'_i=1,\quad i\in N_2,$$

令 $\mathbf{C}=(c_{ij})_{n\times n}=\mathbf{BD}_2$，则对任意的 $i\in N_1\cup N_3$，由式 (8) 可得

$$\begin{aligned}\Lambda_i(\mathbf{C}) &= \sum_{t\in N_1\cup N_3,t\neq i}|b_{it}|\frac{\Lambda_t(\mathbf{B})+\delta}{|b_{tt}|}+\sum_{t\in N_2}|b_{it}| \\ &\leq \sum_{t\in N_1\cup N_3,t\neq i}|b_{it}|+\sum_{t\in N_2}|b_{it}|=\Lambda_i(\mathbf{B})<|b_{ii}|d_i'=|c_{ii}|,\end{aligned}$$

而对任意的 $j\in N_2$，由式 (9) 可得

$$\begin{aligned}\Lambda_j(\mathbf{C}) &= \sum_{t\in N_1\cup N_3}|b_{jt}|\frac{\Lambda_t(\mathbf{B})+\delta}{|b_{tt}|}+\sum_{t\in N_2,t\neq j}|b_{jt}| \\ &= \sum_{t\in N_1}|a_{jt}|\tilde{\mu}\frac{T_t+\varepsilon\sum\limits_{k\in N_3}|a_{tk}|+\delta}{|a_{tt}|\tilde{\mu}} \\ &\quad +\sum_{t\in N_2,t\neq j}|a_{jt}|x_t+\sum_{t\in N_3}|a_{jt}|d_t\frac{T_t+\varepsilon\sum\limits_{k\in N_3,k\neq t}|a_{tk}|+\delta}{|a_{tt}|d_t} \\ &= \sum_{t\in N_1\cup N_3}|a_{jt}|\frac{T_t}{|a_{tt}|}+\sum_{t\in N_2,t\neq j}|a_{jt}|x_t+\varepsilon\sum_{t\in N_1\cup N_3}\frac{|a_{jt}|}{|a_{tt}|}\Big(\sum_{k\in N_3,k\neq t}|a_{tk}|\Big) \\ &\quad +\delta\sum_{t\in N_1\cup N_3}\frac{|a_{jt}|}{|a_{tt}|}<|a_{jj}|x_j=|b_{jj}|=|c_{jj}|.\end{aligned}$$

综上所述，对任意的 $i\in N$，有 $\Lambda_i(\mathbf{C})<|c_{ii}|$，可见 $\mathbf{C}=\mathbf{AD}_1\mathbf{D}_2$ 是严格对角占优矩阵，故 $\mathbf{A}$ 为非奇 H 矩阵。 **证毕**

注 由于对任意的 $t\in N_3$ 有 $S_t\leq\Lambda_t(\mathbf{A})$ 和 $T_t\leq\Lambda_t(\mathbf{A})$，所以对任意的 $t\in N_3$，有 $S_t/|a_{tt}|\leq y_t$ 和 $T_t/|a_{tt}|\leq y_t$。由式 (1) 可知

$$\mu\Big(|a_{ii}|-\sum_{t\in N_1,t\neq i}|a_{it}|-\sum_{t\in N_2}|a_{it}|x_t\Big)>\mu\sum_{t\in N_3}|a_{it}|y_t,$$

由 $\tilde{\mu}$ 的定义可知

$$(\tilde{\mu}-\mu)\Big(|a_{ii}|-\sum_{t\in N_1,t\neq i}|a_{it}|\Big)\geq(1-\mu)\Big(\sum_{t\in N_2}|a_{it}|x_t+\sum_{t\in N_3}|a_{it}|\Big)\geq(1-\mu)\sum_{t\in N_2}|a_{it}|x_t,$$

从而有

$$\tilde{\mu}\Big(|a_{ii}|-\sum_{t\in N_1,t\neq i}|a_{it}|\Big)-\sum_{t\in N_2}|a_{it}|x_t\geq\mu\Big(|a_{ii}|-\sum_{t\in N_1,t\neq i}|a_{it}|-\sum_{t\in N_2}|a_{it}|x_t\Big),$$

又对任意的 $t\in N_1$，有 $T_t\leq\Lambda_t(\mathbf{A})=|a_{tt}|$，即对任意的 $t\in N_1$，有 $T_t/|a_{tt}|\leq 1$。故式 (2), (3) 比式 (1) 更易满足，可见定理 2 改进了文献 [4] 的结果。

定理 3 设 $\mathbf{A}=(a_{ij})\in\mathrm{C}^{n\times n}$ 是不可约矩阵，若对任意的 $i\in N_1$，$j\in N_2$，有

$$|a_{ii}|\tilde{\mu}\geq\tilde{\mu}\sum_{t\in N_1,t\neq i}|a_{it}|+\sum_{t\in N_2}|a_{it}|x_t+\mu\sum_{t\in N_3}|a_{it}|\frac{S_t}{|a_{tt}|},\tag{10}$$

$$|a_{jj}|x_j\geq\sum_{t\in N_1}|a_{jt}|\frac{T_t}{|a_{tt}|}+\sum_{t\in N_2,t\neq i}|a_{jt}|x_t+\sum_{t\in N_3}|a_{jt}|\frac{T_t}{|a_{tt}|},\tag{11}$$

且式 (10) 或 (11) 中至少有一严格不等式成立，则 $\mathbf{A}$ 为非奇H矩阵。

证明　若 $\mu = 0$，则对任意的 $i \in N_3$, $t \in N_1 \cup N_2$，有 $a_{it} = 0$，与 $\mathbf{A}$ 不可约矛盾，于是 $\mu > 0$，进而 $\tilde{\mu} > 0$。若存在 $j \in N_3$，使得 $S_j = 0$，则对任意的 $t \neq j$，有 $a_{jt} = 0$，与 $\mathbf{A}$ 不可约矛盾，故 $S_j > 0$。

构造正对角矩阵 $\mathbf{D}_1 = \mathrm{diag}(d_1, d_2, \cdots, d_n)$，且令 $\mathbf{B} = (b_{ij})_{n\times n} = \mathbf{AD}_1$，其中

$$d_i = \tilde{\mu}, \quad \forall\, i \in N_1, \quad d_i = x_i, \quad \forall\, i \in N_2, \quad d_i = \mu\frac{S_i}{|a_{ii}|}, \quad \forall\, i \in N_3,$$

若存在 $i \in N_1 \cup N_3$，使得 $\Lambda_i(\mathbf{B}) = 0$，则对任意的 $t \neq i$，有 $a_{it} = 0$，与 $\mathbf{A}$ 不可约矛盾，故 $\Lambda_i(\mathbf{B}) > 0$。

再构造正对角矩阵 $\mathbf{D}_2 = \mathrm{diag}(d'_1, d'_2, \cdots, d'_n)$，且令 $\mathbf{C} = (c_{ij})_{n\times n} = \mathbf{BD}_2$，其中

$$d'_i = \frac{\Lambda_i(\mathbf{B})}{|b_{ii}|}, \quad \forall\, i \in N_1 \cup N_3, \quad d'_i = 1, \quad i \in N_2,$$

与定理2类似的推证可得，对任意的 $i \in N$，有 $\Lambda_i(\mathbf{C}) \le |c_{ii}|$。由式 (10) 或 (11) 中至少有一严格不等式成立可得，至少存在一个 $j \in N_1 \cup N_2$，使得 $\Lambda_j(\mathbf{C}) < |c_{jj}|$。又由 $\mathbf{A}$ 不可约知 $\mathbf{C}$ 为不可约矩阵，故 $\mathbf{C}$ 为不可约对角占优矩阵，从而 $\mathbf{C}$ 为非奇H矩阵[1]，于是 $\mathbf{A}$ 为非奇H矩阵[3]。

证毕

3　数值算例

例　设

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 9 & 7 & 1 & 1 \\ 1 & 9 & 8 & 1 \\ 1 & 1 & 15 & 4 \\ 0 & 0 & 12 & 15 \end{pmatrix},$$

则 $N_1 = \{1\}$, $N_2 = \{2\}$, $N_3 = \{3, 4\}$。通过计算可得

$$x_2 = \frac{1}{10}, \quad y_3 = \frac{2}{5}, \quad y_4 = \frac{4}{5}, \quad S_3 = \frac{3}{2}, \quad S_4 = \frac{6}{5},$$
$$\mu = \frac{55}{59}, \quad \tilde{\mu} = \frac{281}{295}, \quad T_1 = \frac{256}{295}, \quad T_3 = \frac{797}{590}, \quad T_4 = \frac{66}{59}.$$

由于

$$|a_{11}|\tilde{\mu} = \frac{2529}{295} > \frac{512}{590}$$
$$= |a_{12}|x_2 + \mu\Big(|a_{13}|\frac{S_3}{|a_{33}|} + |a_{14}|\frac{S_4}{|a_{44}|}\Big) = 7 \times \frac{1}{10} + \frac{55}{59} \times \Big(\frac{1}{10} + \frac{2}{25}\Big),$$

$$|a_{22}|x_2 = \frac{9}{10} > \frac{11834}{13275}$$
$$= |a_{21}|\frac{T_1}{|a_{11}|} + |a_{23}|\frac{T_3}{|a_{33}|} + |a_{24}|\frac{T_4}{|a_{44}|} = 1 \times \frac{\frac{256}{295}}{9} + 8 \times \frac{\frac{797}{590}}{15} + 1 \times \frac{\frac{66}{59}}{15},$$

由定理2知$\mathbf{A}$为非奇H矩阵。由于

$$|a_{22}|\,x_2 = \frac{9}{10} < 5 = |a_{21}| + |a_{23}|\,y_3 + |a_{24}|\,y_4 = 1 + 8 \times \frac{2}{5} + 1 \times \frac{4}{5},$$

利用文献[4]中定理无法判定。显然，本文的判定条件较文献[4]的相应判定更加优越。

取正对角矩阵$\mathbf{D} = \mathrm{diag}(5,5,2,4)$，易知$\mathbf{AD}$为严格对角占优矩阵，故$\mathbf{A}$为非奇H矩阵。

参考文献：

[1] Varga R S. On recurring theorems on diagonal dominance[J]. Liner Algebra Appl, 1976, 13: 1-9

[2] 黄廷祝. 非奇H矩阵的简捷判据[J]. 计算数学，1993, 3: 318-328
Huang T Z. Some simple determinate *conditions for nonsingular H-matrix*[J]. Mathematica Numerica Sinica, 1993, 3: 318-328

[3] Berman A, Plemmons R J. Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences[M]. Philadephia: SIAM Press, 1994

[4] 干泰彬，黄廷祝. 非奇异H矩阵的实用充分条件[J]. 计算数学，2004, 1: 109-116
Gan T B, Huang T Z. Practical sufficient conditions for nonsingular H-matrices[J]. Mathematica Numerica Sinica, 2004, 1: 109-116

[5] 谢清明. 关于H矩阵的实用判定的注记[J]. 应用数学学报，2006, 6: 1080-1084
Xie Q M. A note on the practical criteria for H-matrices[J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, 2006, 6: 1080-1084

[6] 庹清，谢清明，刘建州. 非奇异H矩阵的实用新判定[J]. 应用数学学报，2008, 1: 143-151
Tuo Q, Xie Q M, Liu J Z. New practical criteria for nonsingular H-matrices[J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, 2008, 1: 143-151

[7] 庹清. 非奇H-矩阵判定的新条件[J]. 工程数学学报，2008, 25(4): 749-752
Tuo Q. New sufficient conditions for nonsingular H-matrices[J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 2008, 25(4): 749-752

Improved Determinate Conditions for the Nonsingular H-matrix

ZHAO Liang-dong, XU Zhong, LU Quan

(Department of Applied Mathematics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072)

Abstract: Nonsingular H-matrices play an important role in control theory, mathematical economics, dynamic system, etc. But it is difficult to determine the nonsingularity of a nonsingular H-matrix in practice. In this paper, a set of determinate conditions for nonsingular H-matrices are obtained, which improved and generalized recent results. Numerical result indicates the conditions are practical and effective.

Keywords: generalized strictly diagonally dominant matrices; nonsingular H-matrix; determinate conditions

Received: 13 Mar 2009. **Accepted:** 31 Dec 2009.
Foundation item: The National Natural Science Foundation of China (10802068).